



UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE

Ecole Doctorale EMMA (Spécialité Mécanique)

Thèse

Présentée et soutenue publiquement pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LORRAINE

par **Jie YANG**

**Solving Partial Differential Equations by  
Taylor Meshless Method**

Soutenue le 22 janvier 2018

**Membres du jury:**

<b>Rapporteurs:</b>	Prof. <b>Pierre Villon</b>	Université de Technologie de Compiègne, France
	Prof. <b>Zakaria Belhachmi</b>	Université de Haute Alsace, France
<b>Examineurs:</b>	Prof. <b>Pierre Ladevèze</b>	Université de Paris-Saclay, France
	Dr. <b>Yao Koutsawa</b>	Luxembourg Institute of Science and Technology
	Dr. <b>Renata Bunoiu</b>	Université de Lorraine, France
	Prof. <b>Michel Potier-Ferry</b>	Université de Lorraine, France
	Prof. <b>Heng HU</b>	Wuhan University, China

Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux  
LEM3 UMR CNRS 7239 - Université de Lorraine  
7 rue Félix Savart - 57073 Metz Cedex 03 - France

# Abstract

Based on Taylor Meshless Method (TMM), the aim of this thesis is to develop a simple, robust, efficient and accurate numerical method which is capable of solving large scale engineering problems and to provide a new idea for the follow-up study on meshless methods. To this end, the influence of the key factors in TMM has been studied by solving three-dimensional and non-linear Partial Differential Equations (PDEs). The main idea of TMM is to use high order polynomials as shape functions which are approximated solutions of the PDE and the discretization concerns only the boundary. To solve the unknown coefficients, boundary conditions are accounted by collocation procedures associated with least-square method. TMM that needs only boundary collocation without integration process, is a true meshless method.

The main contributions of this thesis are as following: 1) Based on TMM, a general and efficient algorithm has been developed for solving three-dimensional PDEs; 2) Three coupling techniques in piecewise resolutions have been discussed and tested in cases of large-scale problems, including least-square collocation method and two coupling methods based on Lagrange multipliers; 3) A general numerical method for solving non-linear PDEs has been proposed by combining Newton Method, TMM and Automatic Differentiation technique; 4) To apply TMM for solving problems with singularities, the singular solutions satisfying the control equation are introduced as complementary shape functions, which provides a theoretical basis for solving singular problems.

Key words: Taylor series, Meshless method, Boundary collocation, Coupling techniques in piecewise resolution, Automatic Differentiation, Singular shape function, Partial Differential Equation

# Résumé

Le but de cette thèse est de développer une méthode numérique simple, robuste, efficace et précise pour résoudre des problèmes d'ingénierie de grande taille à partir de la méthode Taylor Meshless (TMM) et fournir de nouvelles idées principales de TMM est d'utiliser comme fonctions de forme des polynômes d'ordre élevé qui sont des solutions approchées de l'EDP. Ainsi la discrétisation ne concerne que la frontière. Les coefficients de ces fonctions de forme sont obtenus en discrétisant les conditions aux limites par des procédures de collocation associées à la méthode des moindres carrés. TMM est alors une véritable méthode sans maillage sans processus d'intégration, les conditions aux limites étant obtenues par collocation.

Les principales contributions de cette thèse sont les suivantes: 1) Basé sur TMM, un algorithme général et efficace a été développé pour résoudre des EDP elliptiques tridimensionnelles; 2) Trois techniques de couplage pour des résolutions par morceaux ont été discutées dans des cas de problèmes à grande échelle: la méthode de collocation par les moindres carrés et deux méthodes de couplage basées sur les multiplicateurs de Lagrange; 3) Une méthode numérique générale pour résoudre les EDP non-linéaires a été proposée en combinant la méthode de Newton, la TMM et la technique de différentiation automatique. 4) Pour résoudre des problèmes avec un bord non régulier, des solutions singulières satisfaisant l'équation de contrôle sont introduites comme des fonctions de forme complémentaires, ce qui fournit une base théorique pour la résolution de problèmes singuliers.

Mots clés: série de Taylor, méthode sans maillage, résolution par morceaux, Différentiation automatique, fonctions de forme singulières, Équations aux Dérivées partielles